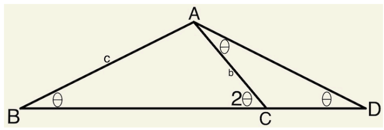
問題１

nを２以上の自然数とする。三角形ABCにおいて、辺ABの長さをc、辺CAの長さをbで表す。$\angle \mathrm{ACB} = n\angle \mathrm{ABC}$であるとき、$c < nb$を示せ。

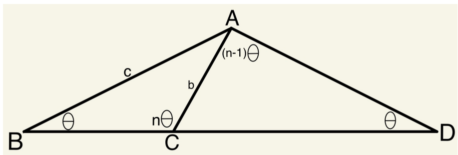
［大阪大学（2020）前期理系第３問］

（解答例１） 初等幾何を使う。

まず、$n = 2$のときを扱う。題意から$\angle \mathrm{ABC} = \theta, \angle \mathrm{ACB} = 2\theta$とする。直線BCにおいて、点Cに関し、点Bと反対側に点Dを選び、$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ADC}$となるようにする。そのような点Dの存在は明らかである。実際、点DをCに近づけると$\angle \mathrm{ADC}$は2θに近くなり、Cから離れる$\angle \mathrm{ADC}$は0に近くなるから、うまく選べば、$\angle \mathrm{ADC} = \theta$とすることができる。すると、$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{ACB} - \angle \mathrm{ADC} = \theta$であるから、$\triangle \mathrm{ABD}$と$\triangle \mathrm{CAD}$は２等辺三角形である。これより、$\mathrm{AD} = c, \mathrm{CD} = b$である。三角形の一つの辺の長さは、他の２辺の長さの和よりも大きいから、$c = \mathrm{AD} < \mathrm{AC} + \mathrm{CD} = 2b$となる。

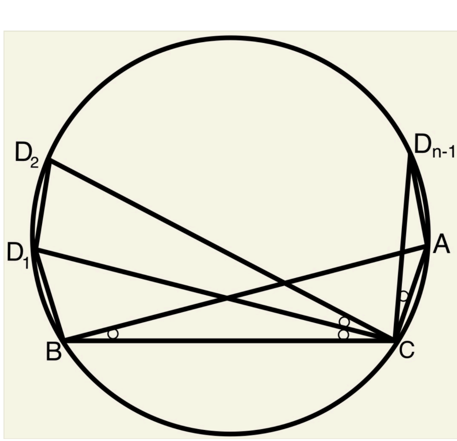


次に$n > 2$とし、$n-1$のときは成立すると仮定する。$\angle \mathrm{ABC} = \theta, \angle \mathrm{ACB} = n\theta$とする。$n = 2$のときと同じく、$\angle \mathrm{ADC} = \theta$となる点Dを辺BCの延長上に選ぶ。すると、$\mathrm{AD} = c$である。$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{ACB} - \angle \mathrm{ADC} = (n-1)\theta$であるから、数学的帰納法の仮定から$\mathrm{CD} < (n-1)b$となる。三角形の一つの辺の長さは、他の２辺の長さの和よりも大きいから、$c = \mathrm{AD} < \mathrm{AC} + \mathrm{CD} < b + (n-1)b = nb$となる。これより、題意が証明された。■



（解答例２） 円周角を使う。

$\angle \mathrm{ABC} = \theta, \angle \mathrm{ACB} = n\theta$とする。$\triangle \mathrm{ABC}$の外接円をOとし、弦ABの弧を$n$等分する点を点Bから点Aに向かって、$\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_{n-1}$とする。すると、それぞれの弦$\mathrm{D}_{i-1}\mathrm{D}_i$の円周角は$\angle \mathrm{D}_{i-1}\mathrm{C}\mathrm{D}_i = \theta$となる。但し、$\mathrm{D}_0 = \mathrm{B}, \mathrm{D}_n = \mathrm{A}$とし、$i = 1, \ldots, n$である。円周角が等しければ弦の長さも等しいから、それぞれの弦$\mathrm{D}_{i-1}\mathrm{D}_i$の長さは辺$b = \mathrm{AC}$と等しい。三角形の一つの辺の長さは、他の２辺の長さの和よりも大きいことを繰り返し使うと



$$
\begin{aligned}
c = \mathrm{AB} &< \mathrm{BD_{n-1}} + \mathrm{D_{n-1}A} \\
&< \mathrm{BD_{n-2}} + \mathrm{D_{n-2}D_{n-1}} + \mathrm{D_{n-1}A} \\
&< \mathrm{BD_{n-3}} + \mathrm{D_{n-3}D_{n-2}} + \mathrm{D_{n-2}D_{n-1}} + \mathrm{D_{n-1}A} \\
&< \cdots \\
&< \mathrm{BD_1} + \mathrm{D_1D_2} + \cdots + \mathrm{D_{n-2}D_{n-1}} + \mathrm{D_{n-1}A} = nb
\end{aligned}
$$

が従う。■

（解答例３） 三角関数を使う。$\angle\mathrm{ABC} = \theta$ と置く。正弦定理から

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{c}{\sin n\theta}$$

となるから、

$$c = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} b$$

となる。すると、

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} < n$$

であること、すなわち、

$$\sin n\theta < n\sin\theta \tag{1}$$

が $n = 2, 3, \ldots$ で成立することを示せばよい。いま、$0 < (n+1)\theta < \pi$ であるから

$$0 < \theta < \frac{\pi}{n+1} \tag{2}$$

である。不等式 (1) を n に関する数学的帰納法で示す。まず、$n = 2$ とする。$\cos\theta < 1$ であるから

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta < 2\sin\theta$$

となるから、(1) は成立する。$n \geq 3$ とし $n-1$ のとき (1) が成立すると仮定すると

$$
\begin{aligned}
\sin n\theta &= \sin((n-1)\theta + \theta) \\
&= \sin(n-1)\theta\cos\theta + \cos(n-1)\theta\sin\theta \\
&< (n-1)\sin\theta\cos\theta + \cos(n-1)\theta\sin\theta \\
&\leq (n-1)\sin\theta + \sin\theta \\
&= n\sin\theta
\end{aligned}
$$

となるから、n のときも (1) は成立する。■

（解答例４）微分法を使う解答例である。（解答例３）の冒頭の部分を踏襲し、不等式 (1) を示せば十分であることを認め、解答例を続ける。$n \geq 2$ を固定し、

$$f(\theta) = n \sin\theta - \sin n\theta \tag{3}$$

と置き、$f(\theta) > 0$ を (2) の範囲で示す。函数 $f(\theta)$ は任意の実数 θ で定義され、$f(0) = 0$ である。すると、(2) の範囲で $f(\theta)$ が単調増加であること、すなわち、$f'(\theta) > 0$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= n\cos\theta - n\cos n\theta = n(\cos\theta - \cos n\theta) \\ &= 2n \sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n-1}{2}\theta \end{aligned}$$

ここで (2) から

$$0 < \frac{n-1}{2}\theta < \frac{n+1}{2}\theta < \frac{\pi}{2}$$

であるから、(2) の範囲で $f'(\theta) > 0$ である。■

（解答例５）微分法を使う別解を紹介する。再び、（解答例３）の冒頭の部分を踏襲し、不等式 (1) を示せば十分であることを認める。n を変数 x と考え、定数

$$0 < \theta < \frac{\pi}{3} \tag{4}$$

を固定し、

$$f(x) = x\sin\theta - \sin x\theta \tag{5}$$

と置く、$f(x) > 0$ を

$$2 \leq x < \frac{\pi}{\theta} - 1 \tag{6}$$

の範囲で示す。まず、

$$f(2) = 2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta(1 - \cos\theta) > 0$$

である。すると、(6) の範囲で $f(x) > 0$ であること、すなわち、$f'(x) > 0$ を示せばよい。

$$f'(x) = \sin\theta - x\cos x\theta$$

$$f''(x) = -x^2 \sin x\theta$$

となる。すると、

$$0 < x\theta < \pi - \theta < \pi$$

であることから、(6) の範囲で $f''(x) < 0$ である。すなわち、$f'(x)$ は単調減少である。しかも、(4) から

$$f'\left(\frac{\pi}{\theta} - 1\right) = \sin\theta - \left(\frac{\pi}{\theta} - 1\right)\cos(\pi - \theta) = \sin\theta + \left(\frac{\pi}{\theta} - 1\right)\cos\theta > 0$$

である。それゆえ、(6) の範囲で $f'(x) > 0$ である。■