問題２

平面上に三角形 ABC と 2 つの正三角形 ADB, ACE とがある。ただし、点 C、点 D は直線 AB に関して反対側にあり、また、点 B、点 E は直線 AC に関して反対側にある。線分 AB の中点を K、線分 AC の中点を L、線分 DE の中点を M とする。線分 KL の中点を N とするとき、直線 MN と直線 BC とは垂直であることを示せ。 [名古屋工業大学]

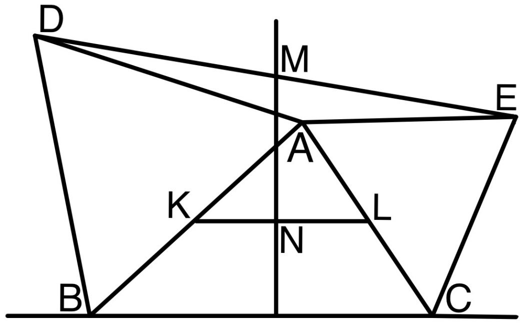
（解答例１）

xy 平面で、頂点 A を y 軸上に、頂点 B, C を x 軸上に選び、

$$\mathrm{A}(0, a),\ \mathrm{B}(b, 0),\ \mathrm{C}(c, 0)$$

とする。ここで、$a > 0, b < c$ である。すると、

$$\mathrm{N}\left(\frac{b+c}{4}, \frac{a}{2}\right)$$



である。題意を示すには、M の x 座標が

$$\frac{b+c}{4}$$

をいえばよい。まず、E の x 座標を計算する。E(x, y) とすると、AE = CE = AC であるから

$$x^2 + (y-a)^2 = (x-c)^2 + y^2 = a^2 + c^2$$

となる。すると、第 1 の等式から

$$-2ay + a^2 = -2cx + c^2$$

である。すなわち、

$$2ay = 2cx + a^2 - c^2$$

である。これを第 2 の等式の左辺に代入すると

$$4a^2(x^2 - 2cx + c^2) + 4c^2x^2 + 4c(a^2 - c^2)x + (a^2 - c^2)^2 = 4a^2(a^2 + c^2)$$

となる。すると、

$$4(a^2 + c^2)x^2 - 4c(a^2 + c^2)x + (a^2 + c^2)^2 = 4a^2(a^2 + c^2)$$

$$
\begin{aligned}
4x^2-4cx+(a^2+c^2)&=4a^2\\
4x^2-4cx+c^2&=3a^2\\
(2x-c)^2&=3a^2\\
x&=\frac{1}{2}(c\pm\sqrt{3}a)
\end{aligned}
$$

題意から

$$x=\frac{1}{2}(c+\sqrt{3}a)$$

同じ計算をすると、D の x 座標は

$$x=\frac{1}{2}(b-\sqrt{3}a)$$

となる。これより M の x 座標は

$$\frac{b+c}{4}$$

となる。■

（解答例２）$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{w}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{v'}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{w'}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ と置く。すると、

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{MN}} &= \overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}\\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{v'}+\overrightarrow{w'})
\end{aligned}
$$

である。$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w'}&=|\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w'}|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),\\
\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v'}&=|\overrightarrow{w}||\overrightarrow{v'}|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

であるから、$|\overrightarrow{v}|=|\overrightarrow{v'}|, |\overrightarrow{w}|=|\overrightarrow{w'}|$ より、$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v'}$ である。これより $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{w}-\overrightarrow{v}$ の内積は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}(|\overrightarrow{w}|^2-|\overrightarrow{v}|^2)-\frac{1}{2}(\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{w'}-\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v'})\\
=\ &\frac{1}{4}(|\overrightarrow{w}|^2-|\overrightarrow{v}|^2)-\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{w}|^2\cos\frac{\pi}{3}-|\overrightarrow{v}|^2\cos\frac{\pi}{3}\right)=0
\end{aligned}
$$

となるから、直線 MN と直線 BC とは垂直である。■

（解答例３）複素数平面に与えられた図形を配置し、$\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\ldots$ を表す複素数を $a,b,c,\ldots$ とする。ここで、$a=0$ とし、A を中心とし、B と C はこの順に反時計回りとする。

$$\omega=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とする。点 B は A を中心とし点 D を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させたものであり、点 E は A を中心とし点 C を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させたものであるから

$$b = d\omega,\ \ e = c\omega$$

である。すると、

$$\begin{aligned} n - m &= \frac{1}{4}(b+c) - \frac{1}{2}(d+e) \\ &= \frac{1}{4}(b + c - 2(b\omega^{-1}) - 2(c\omega)) \\ &= \frac{1}{4}(b(1-2\omega^{-1}) + c(1-2\omega)) \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{3}i \cdot b - \sqrt{3}i \cdot c) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}i(b-c) \end{aligned}$$

であるから、$n-m$ は $b-c$ を原点を中心として $\dfrac{\pi}{2}$ 回転させ、$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 倍した複素数である。特に、直線 MN と直線 BC とは垂直である。■