問題４

xy 平面の点 (a,b) は、a と b がともに整数のとき格子点と呼ばれる。xy 平面において、3つの頂点がすべて格子点である正三角形は存在しない。これを証明せよ。ただし、$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしで使ってもよい。

［（類題）名古屋大学（1978）理系第３問］

［（類題）大阪大学（1999）前期理系第２問］

名古屋大学（1978）の“有理数”を“整数”に変更した問題である。名古屋大学の問題と同じ問題が、21年後の1999年、大阪大学でも出題された。もっとも、名古屋大学の問題が出題された1978年の指導要領には行列があったけれども、複素数平面はなかったから、名古屋大学の問題は行列の回転を使わせることが狙いであったと考えられる。大阪大学の問題が出題された1999年の指導要領では行列が姿を消し、複素数平面が復活したから、大阪大学の問題は複素数平面の回転を使わせることが狙いであったと考えられる。以下、座標平面を使う（解答例１）と複素数平面の回転を使う（解答例２）に加え、現行の指導要領の範囲外ではあるが、行列の回転を使う（解答例３）も紹介する。

（解答例１） 背理法で証明する。xy 平面の格子三角形 ABC は正三角形であると仮定し、$\mathrm{A}(a,a'),\mathrm{B}(b,b'),\mathrm{C}(c,c')$ とする。正三角形 ABC を x 軸の負の方向に a、y 軸の負の方向に a' の平行移動をすると、頂点 $(a,a'),(b,b'),(c,c')$ は、それぞれ、

$$(0,0),\ \ (b-a,b'-a'),\ \ (c-a,c'-a')$$

となるから、正三角形 ABC の一つの頂点は原点であると仮定する[1]。x_1,x_2,y_1,y_2 を整数とし、正三角形 OAB の頂点を $\mathrm{O}(0,0),\mathrm{A}(x_1,y_1),\mathrm{B}(x_2,y_2)$ とする。三角形の面積の公式から、正三角形 OAB の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{4}(x_1^2+y_1^2)$$

となるから、x_1 と y_1 が整数、$\sqrt{3}$ が無理数であることから、面積は無理数である。

[1]（解答例１）の落とし穴は、頂点 A を x 軸上に選び、頂点を $\mathrm{O}(0,0),\mathrm{A}(a,0),\mathrm{B}(c,d)$ とすることから証明を始めてしまうことである。平行移動から頂点の一つを原点とすることはできるが、回転移動すると、頂点が整数であることは保たれない。特に、$\mathrm{A}(a,0)$ の a は整数とは限らない。この誤答（悲劇！）は、「座標を選ぶときはできるだけ簡単に選ぶ」という鉄則を（丸）暗記していることが原因である。この誤答をすると、部分点のかけらもないであろう。

一般に、頂点を $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(a,b), \mathrm{B}(c,d)$ とする三角形 OAB の面積は、

$$\frac{1}{2}|ad-bc|$$

となる。特に、$\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(x_1,y_1), \mathrm{B}(x_2,y_2)$ を頂点とする正三角形の面積

$$\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

は有理数となるから、矛盾。■

（解答例２） x_1, x_2, y_1, y_2 を整数とし、$\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(x_1,y_1), \mathrm{B}(x_2,y_2)$ を頂点とする正三角形 OAB が存在すると仮定する。複素数平面の複素数

$$z = x_1 + y_1\sqrt{-1}, \;\; w = x_2 + y_2\sqrt{-1}$$

を考える。すると、z を原点を中心とし $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させると w になるか、あるいは、w を原点を中心とし $\dfrac{\pi}{3}$ 回転させると z になるかのどちらかである。前者とすると

$$w = \left(\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}\right)z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right)(x_1 + y_1\sqrt{-1})$$

となるから、

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1, \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1$$

となる。ここで、x_1 と y_1 は整数で、$\sqrt{3}$ は無理数であることから、x_2 と y_2 は無理数となり、矛盾。■

（解答例３） x_1, x_2, y_1, y_2 を整数とし、$\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(x_1,y_1), \mathrm{B}(x_2,y_2)$ を頂点とする正三角形 OAB が存在すると仮定する。原点を中心とし、反時計回りに A を $\dfrac{\pi}{3}$ 回転すると B に移るとすると、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1\right)$$

となる。ここで、x_1 と y_1 は整数で、$\sqrt{3}$ は無理数であることから、x_2 と y_2 は無理数となり、矛盾。■