問題５ａ

あみだくじの縦棒を n 本とし、始点を $1,2,\ldots,n$ として、終点を $1',2',\ldots,n'$ とする。始点は、常に、左から順番に $1,2,\ldots,n$ とし、終点の $1',2',\ldots,n'$ はどのように並べることもできるとする。すると、終点の $1',2',\ldots,n'$ の並べ方は $n!$ 通りある。終点の $1',2',\ldots,n'$ をどのように並べても、始点の i が終点の i' に辿り着く（$i=1,2,\ldots,n$）横棒の入れ方が存在する。これを証明せよ。

（解答例１）まず、縦棒が一本のときは自明である。縦棒の本数を n 本とし、$n\geq 2$ とする。終点を左から

$$a'_1,a'_2,\ldots,a'_{k-1},1',a'_{k+1},\ldots,a'_n$$

とする。いま、終点が左から

$$1',a'_1,a'_2,\ldots,a'_{k-1},a'_{k+1},\ldots,a'_n$$

となっているならば、数学的帰納法の仮定から、題意を満たす横棒の入れ方は存在する。実際、もっとも、左側にある縦棒は無視すればいいから、縦棒が $n-1$ 本のときに帰着する。すると、縦棒が k 本で始点が左から

$$1,2,3,\ldots,k$$

となっており、終点が左から

$$2',3',\ldots,k',1'$$

となっているあみだくじについて、それぞれの j が j' に辿り着くように横棒を入れることができればよいが、xy 平面で考え、左から i 番目の縦棒を $(i-1,0)$ と $(i-1,k)$ を結ぶ線分とするならば、横棒は $(i-1,k-i)$ と $(i,k-i)$ を結ぶ線分（$i=1,2,\ldots,k-1$）とすればよい。■

（解答例２）終点が左から $i'_1,i'_2,\ldots,i'_n$ のとき、自然数の n 個の組

$$(i'_1,i'_2,\ldots,i'_n)$$

を対応させ、簡単のため、終点が $(i'_1,i'_2,\ldots,i'_n)$ である、ということにする。（いささか奇妙であるが）$(i'_1,i'_2,\ldots,i'_n)$ の辞書式順序に関する数学的帰納法を使う。辞書式順序とは

$$(i'_1,i'_2,\ldots,i'_n) <_{\mathrm{lex}} (j'_1,j'_2,\ldots,j'_n)$$

であることを、

$$i'_1 = j'_1, \ldots, i'_{k-1} = j'_{k-1}, i'_k < j'_k$$

となる k が存在するとき、と定義する。辞書式順序でもっとも小さくなるのは

$$(1', 2', \ldots, n')$$

であるが、そのときは横棒の入っていないあみだくじが題意を満たす。いま、

$$(1', 2', \ldots, n') <_{\mathrm{lex}} (i'_1, i'_2, \ldots, i'_n)$$

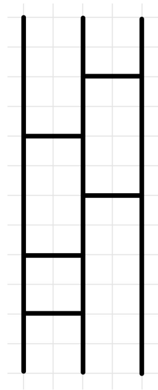
とし、辞書式順序で $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_n)$ よりも小さい終点のときは、題意のあみだくじが存在すると仮定する。$(1', 2', \ldots, n') <_{\mathrm{lex}} (i'_1, i'_2, \ldots, i'_n)$ であるから、$i_{k-1} > i_k$ となる k が存在し、

$$(i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-2}, i'_k, i'_{k-1}, \ldots, i'_n) <_{\mathrm{lex}} (i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-2}, i'_{k-1}, i'_k, \ldots, i'_n)$$

である。数学的帰納法の仮定から、終点が $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_{k-2}, i'_k, i'_{k-1}, \ldots, i'_n)$ のときには題意を満たすあみだくじが存在するから、そのあみだくじのもっとも下にある横棒よりも下の部分に、左から $k-1$ 番目の縦棒と左から k 番目の縦棒との間に横棒を入れれば、題意を満たすあみだくじが作れる。■

問題５ｂ

表と裏の出る確率が等しいコインがある。そのコインを繰り返し投げる操作を続ける。i 回目に表が出れば、xy 平面に $(0,i)$ と $(1,i)$ を結ぶ線分を引く。i 回目に裏が出れば、xy 平面に $(1,i)$ と $(2,i)$ を結ぶ線分を引く。コインを n 回投げた後、xy 平面に $(0,0)$ と $(0,n+1)$ を結ぶ線分、$(1,0)$ と $(1,n+1)$ を結ぶ線分、$(2,0)$ と $(2,n+1)$ を結ぶ線分を引く。たとえば、$n=5$ とし、コインが表、表、裏、表、裏と出たとすると、右図になる。



このように作成した図を縦の棒が 3 本、横の棒が n 本のあみだくじと考え、このあみだくじを使い、抽選をする。真ん中の縦の棒の下端 $(1,0)$ が「当たり」である。

$n=8$ のとき、いちばん左の縦の棒の上端 $(0,9)$、真ん中の縦の棒の上端 $(1,9)$、いちばん右の縦の棒の上端 $(2,9)$ のどれを選ぶと当たる確率がもっとも高くなるか。

（解答例１）真ん中の縦の棒の上端 $(1,9)$ を選ぶとき、真ん中の縦の棒の下端 $(1,0)$ に到達する確率を計算する。コインを 8 回投げるのであるから、あみだくじは全部で $2^8=256$ 個ある。以下、その 256 個のあみだくじのうち、真ん中の縦の棒の上端 $(1,9)$ を選ぶとき、真ん中の縦の棒の下端 $(1,0)$ に到達するものだけを考える。真ん中の縦の棒の上端 $(1,9)$ にある点があみだくじのルールに従って動くとき、真ん中の縦の棒を離れてから再び真ん中の縦の棒に戻るまでを離れと呼ぶ。すると、離れの個数は 1, 2, 3, 4 のいずれかである。離れの個数が 1 個であるあみだくじになるにはコインの表と裏の出る順番は、表裏裏裏裏裏裏表、であるか、裏表表表表表表裏である。離れの個数が 4 個であるあみだくじになるにはコインの表と裏の出る順番は、たとえば、表表裏裏表表表表である。すると、離れの個数が 4 個であるあみだくじの個数は $2^4=16$ 個である。離れの個数が 2 個であるあみだくじになるにはコインの表と裏の出る順番は、たとえば、

$$\boxed{\text{表}}\text{裏裏裏}\boxed{\text{表}}\ \boxed{\text{裏}}\text{表}\boxed{\text{裏}}$$

である。すると、離れの個数が 2 個であるあみだくじの個数は $5\cdot 2^2=20$ 個である。離れの個数が 3 個であるあみだくじになるにはコインの表と裏の出る順番は、たとえば、

$$\boxed{\text{表}}\text{裏}\boxed{\text{表}}\ \boxed{\text{表}}\boxed{\text{表}}\ \boxed{\text{裏}}\text{表}\boxed{\text{裏}}$$

である。すると、離れの個数が3個であるあみだくじの個数は $6\cdot 2^3=48$ 個である。それゆえ、真ん中の縦の棒の上端 $(1,9)$ を選ぶとき、真ん中の縦の棒の下端 $(1,0)$ に到達するあみだくじの個数は、86個である。

以上の結果、真ん中の縦の棒の上端 $(1,9)$ を選ぶとき、真ん中の縦の棒の下端 $(1,0)$ に到達する確率は

$$\frac{86}{256}=\frac{43}{128}$$

である。すると、対称性から、いちばん左の縦の棒の上端 $(0,9)$ を選ぶとき、真ん中の縦の棒の下端 $(1,0)$ に到達する確率も、いちばん右の縦の棒の上端 $(2,9)$ を選ぶとき、真ん中の縦の棒の下端 $(1,0)$ に到達する確率も、

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{43}{128}\right)=\frac{85}{256}$$

である。

$$\frac{85}{256}<\frac{43}{128}$$

であるから、真ん中の棒の上端 $(1,9)$ を選ぶと当たる確率がもっとも高くなる。■

（解答例２）縦の棒が3本、横の棒が n 本のあみだくじ A_n で、いちばん左の棒の上端 $(0,n+1)$、真ん中の棒の上端 $(1,n+1)$、いちばん右の棒の上端 $(2,n+1)$ を選ぶとき、真ん中の棒の下端 $(1,0)$ に到達する確率を、それぞれ、$q_n,\,p_n,\,r_n$ とすると、

$$p_n+q_n+r_n=1,\ \ q_n=r_n$$

である。次に、真ん中の棒の上端 $(1,n+1)$ を選ぶとき、いちばん左の棒の下端 $(0,0)$ といちばん右の棒の下端 $(2,0)$ に到達する確率を、それぞれ、$q_n',\,r_n'$ とすると、

$$p_n+q_n'+r_n'=1,\ \ q_n'=r_n'$$

である。それゆえ、

$$q_n=q_n',\ \ p_n+2q_n=1$$

である。あみだくじ A_n を直線

$$y=\frac{3}{2}$$

で切り離し、あみだくじ A_n の

$$y\geq\frac{3}{2}$$

の部分を、縦の棒が3本、横の棒が $n-1$ 本のあみだくじ A_{n-1} と考える。あみだくじ A_{n-1} で真ん中の棒の上端 $(1,n+1)$ を選ぶとき、いちばん左の棒の下端 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$、

真ん中の棒の下端 $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$、いちばん右の棒の上端 $\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$ に到達する確率は、それぞれ、$q_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}$ である。あみだくじ A_n の一番下の横棒が $(0,1)$ と $(1,1)$ を結ぶ線分である確率と、$(1,1)$ と $(2,1)$ を結ぶ線分である確率は、両者とも

$$\frac{1}{2}$$

である。すると、

$$p_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{2}q_{n-1} = q_{n-1}$$

であるから

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - p_{n-1}) \tag{1}$$

である。初期条件は $p_1 = 0$ であるから、漸化式 (1) を解くと、

$$p_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right),\ \ q_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

である。すると、n が奇数ならば、$p_n < q_n$ であり、n が偶数ならば $p_n > q_n$ である。

特に、$n = 8$ は偶数であるから、真ん中の棒の上端 $(1,9)$ を選ぶと当たる確率がもっとも高くなる。■