問題６

（１）多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。
［京都大学（2003）前期理系第４問］

（２）実数 $x,\, y$ が $|x|\leq 1$ と $|y|\leq 1$ を満たすとき、不等式

$$0\leq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\leq 1$$

が成り立つことを示せ。［大阪大学（2015）前期文系第１問］

（１）（解答例１）割り算を実行し余りを計算する。たとえば、多項式 x^{100} を多項式 x^2+x+1 で割るならば、二項定理から

$$x^{100}=(x^2)^{50}=((x^2+x+1)-(x+1))^{50}=(x^2+x+1)g(x)+(x+1)^{50}$$

となる多項式 $g(x)$ があることから、$x^{100}-(x+1)^{50}$ は x^2+x+1 で割り切れる。すなわち、x^{100} を x^2+x+1 で割ったときの余りと $(x+1)^{50}$ を x^2+x+1 で割ったときの余りは等しい。

一般に、多項式

$$f(x)=p(x^2)+xq(x^2)$$

を多項式 x^2+x+1 で割った余りと多項式

$$p(-(x+1))+xq(-(x+1))$$

を多項式 x^2+x+1 で割った余りは等しい。換言すると、余りを計算するならば、x^2 を $-(x+1)$ に置き換える操作を繰り返せばよい。しかも、

$$x^3=(x^3-1)+1=(x-1)(x^2+x+1)+1$$

であるから、x^3 を１に置き換える操作も許される。

まず、多項式 $(x^{100}+1)^{100}$ を x^2+x+1 で割り算する。x^3 を１に置き換える操作をすると、$(x^{100}+1)^{100}$ は $(x+1)^{100}$ となる。

$$(x+1)^{100}=((x^2+x+1)+x)^{50}$$

$$x^{50}=(x^3)^{16}x^2$$

$$x^2=(x^2+x+1)-(x+1)$$

これより、多項式 $(x^{100}+1)^{100}$ を x^2+x+1 で割り算するときの余りは $-x-1$ である。

次に、多項式 $(x^2+1)^{100}$ を x^2+x+1 で割り算する。

$$(x^2+1)^{100}=((x^2+x+1)-x)^{100}$$

であるから、多項式 $(x^2+1)^{100}$ を x^2+x+1 で割り算するときの余りは、すなわち、x^{100} を x^2+x+1 で割り算するときの余りであるから、x^3 を 1 に置き換える操作をすると、余りは x である。

以上の結果、多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ を多項式 x^2+x+1 で割り算するときの余りは $-x-1+x+1=0$ であるから、多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れる。■

（１）（解答例２）多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ を多項式 x^2+x+1 で割り算するときの商を $Q(x)$ とし、余りを $ax+b$ とする。

$$(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1=(x^2+x+1)Q(x)+(ax+b) \tag{1}$$

いま、

$$\omega=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$

とすると、

$$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2),\quad \omega^3=1$$

である。(1) の両辺に $x=\omega$ と $x=\omega^2$ を代入すると、

$$a\omega+b=(\omega+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1=\omega^2+\omega+1=0$$

$$a\omega^2+b=(\omega^2+1)^{100}+(\omega+1)^{100}=\omega+\omega^2+1=0$$

である。これより、$a\omega(\omega-1)=0$ であるが、$\omega\neq 0,1$ であるから $a=0$ である。すると、$b=0$ である。余り $ax+b=0$ から、多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れる。■

（２）（解答例１）まず、

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
=\ &x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
=\ &\left(x\sqrt{1-y^2}\right)^2+\left(y\sqrt{1-x^2}\right)^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\\
=\ &\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)^2\geq 0
\end{aligned}$$

から

$$0 \leq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$$

である。次に、

$$\begin{aligned} & 1 - (x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,) \\ = \;& 2x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 - 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ = \;& x^2y^2 - 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 \\ = \;& x^2y^2 - 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + (1-x^2)(1-y^2) \\ = \;& \left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

から

$$x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leq 1$$

である。■

（２）（解答例２）$|x| \leq 1, |y| \leq 1$ であるから、

$$x = \cos\alpha, \;\; y = \cos\beta, \quad 0 \leq \alpha,\, \beta \leq \pi$$

と置く。すると、

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \\ = \;& \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta} \\ = \;& \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos^2\beta(1-\cos^2\alpha) + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ = \;& \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ = \;& (\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha)^2 \\ = \;& \sin^2(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

である。$0 \leq \sin^2(\alpha+\beta) \leq 1$ であるから、題意の不等式が成立する。■