問題７

（１）$n \geq 3$ を整数とする。整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が $a_1 < 0,\ a_n > 0$ を満たし

$$a_i - a_{i-1} \leq 1, \qquad 2 \leq i \leq n \tag{1}$$

となるとき、$a_j = 0$ となる $1 < j < n$ が存在する。これを示せ。

（２）n を決まった正の整数とし、$1 \leq k \leq n$ なる整数 k のおのおのに、$1 \leq r \leq n$ なる整数 r を対応させる関数 $r = f(k)$ があって、$k_1 < k_2$ ならばつねに $f(k_1) \leq f(k_2)$ であるとする。このとき、$f(m) = m$ なる整数 m が存在することを証明せよ。　　　　［名古屋大学（1973）理系第２問］

（１）（解答例１）$a_i < 0$ となる i のうち、もっとも大きいものを i_0 とする。このとき $a_{i_0+1} \geq 0$ となるが、$0 < a_{i_0+1} - a_{i_0} \leq 1$ であるから、a_{i_0+1} と a_{i_0} が整数であることから、$a_{i_0+1} - a_{i_0} = 1$ となる。すると、$a_{i_0} \leq -1$ と $a_{i_0+1} \geq 0$ から、$a_{i_0} = -1,\ a_{i_0+1} = 0$ となる。■

（１）（解答例２）n に関する数学的帰納法で証明する。まず、$n = 3$ とすると、$a_1 < 0, a_3 > 0$ と、(1) から $a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = 1$ が従う。次に、$n > 3$ とし、$n-1$ のときは題意が成立すると仮定する。$a_{n-1} = 0$ ならば、何も証明することはない。$a_{n-1} \leq -1$ とすると $a_n \geq 1$ であるから、(1) は成立しない。 $a_{n-1} > 0$ とすると、帰納法の仮定から題意が成立する。■

（１）（解答例３）背理法で証明する。題意が成立しないとする。このとき、$a_i < 0$ であるか $a_i > 0$ である。$a_1 < 0, a_n > 0$ であるから、$a_i \leq -1, a_{i+1} \geq 1$ となる i が存在する。すると、$a_{i+1} - a_i > 1$ となるから、(1) が成立せず、矛盾。■

（２）（解答例１）$f(1) \geq 1, f(n) \leq n$ であるから、$f(1) > 1, f(n) < n$ とし、$f(k) > k$ となる最大の k を k_0 と置く。すると、$f(k_0+1) \leq k_0 + 1$ であるから、

$$k_0 < f(k_0) \leq f(k_0+1) \leq k_0 + 1$$

となる。$f(k_0)$ と $f(k_0+1)$ は整数であるから、

$$k_0 < f(k_0) = f(k_0+1) = k_0 + 1$$

となる。■

（２）（解答例２）$g(k) = k - f(k)$ と置く。すると、$f(1) \geq 1, f(n) \leq n$ から、

$$g(1) \leq 0, \;\; g(n) \geq 0$$

である。$k_1 < k_2$ ならばつねに $f(k_1) \leq f(k_2)$ であるから、

$$\begin{aligned} g(i) - g(i-1) &= (i - f(i)) - ((i-1) - f(i-1)) \\ &= 1 - (f(i) - f(i-1) \leq 1 \end{aligned}$$

である。$g(1) = 0$ ならば $f(1) = 1$ であり、$g(n) = 0$ ならば $f(n) = n$ であるから、$g(1) < 0, g(n) > 0$ とする。すると、問（１）の結果から[1]、$g(m) = 0$ となる整数 m が存在する。すなわち、$f(m) = m$ となる整数 m が存在する。■

[1]（解答例２）は、本問が導入式の問題として、（１）と（２）がセットで出題されたならば、可能な解答である。しかし、名古屋大学（1973）は（２）だけの単独の出題であった。