問題８

$\triangle$ABC は鋭角三角形とする。このとき、各面がすべて $\triangle$ABC と合同な四面体が存在することを示せ。［京大（1999）後期理系第４問］

（解答例１）xyz 空間の $\triangle$ABC を

$$\mathrm{A}(a,0,0),\quad \mathrm{B}(b,0,0),\quad \mathrm{C}(0,c,0)$$

と置く。$\triangle$ABC は鋭角三角形であるから

$$a<0,\quad b>0,\quad c>0$$

としてもよい。示すべきことは、

$$\mathrm{DA}=\mathrm{BC},\quad \mathrm{DB}=\mathrm{CA},\quad \mathrm{DC}=\mathrm{AB}$$

を満たす点 $\mathrm{D}(x,y,z)$（ただし、$z\neq 0$）の存在である。そのような点 D が存在すれば、四面体 ABCD の各面は、$\triangle$ABC と合同である。

条件 $\mathrm{DA}=\mathrm{BC}$, $\mathrm{DB}=\mathrm{CA}$, $\mathrm{DC}=\mathrm{AB}$ から

$$\begin{aligned}(x-a)^2+y^2+z^2 &= b^2+c^2\\ (x-b)^2+y^2+z^2 &= c^2+a^2\\ x^2+(y-c)^2+z^2 &= (b-a)^2\end{aligned}$$

が従う。すると、

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2-2ax+a^2 &= b^2+c^2 \quad \cdots\cdots(*)\\ x^2+y^2+z^2-2bx+b^2 &= c^2+a^2 \quad \cdots\cdots(**)\\ x^2+y^2+z^2-2yc+c^2 &= a^2-2ab+b^2 \quad \cdots\cdots(***)\end{aligned}$$

である。$(**)-(*)$ から $x=a+b$ である。これを $(**)-(***)$ に代入し、計算すると、

$$y=c+\frac{2ab}{c}$$

である。すると、$(*)$ から

$$z^2=-\frac{4ab}{c^2}(c^2+ab) \quad \cdots\cdots(\sharp)$$

となる。$a<0$, $b>0$ であるから、$-ab>0$ である。すると、$(\sharp)$ を満たす z が存在するには、$c^2+ab>0$ となることが必要十分である。

$\triangle$ABC は鋭角三角形であるから、$\mathrm{AB}^2 < \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2$ である。この不等式を計算すると、$c^2 + ab > 0$ となる。すなわち、$(\sharp)$ を満たす z が存在する。■

（解答例２）$\triangle$ABC は鋭角三角形であるから、点 C から直線 AB へ垂線を引くと、その足 D は辺 AB 上（A, B を除く）にある。線分 CD 上（C, D を除く）に点 O を選んで $\triangle$OAB が直角三角形となるようにする。$s = \mathrm{OA}, t = \mathrm{OB}, \mathrm{OD} = a, \mathrm{CD} = b$ とし、$u = \sqrt{b^2 - a^2}$ とする。すると、xyz 空間で $(s, 0, 0), (0, t, 0), (0, 0, u)$ を頂点とする三角形は $\triangle$ABC と合同である。このとき、xyz 空間で

$$(0, 0, 0), \mathrm{A}(s, 0, 0), \mathrm{B}(0, t, 0), (s, t, 0), \mathrm{C}(0, 0, u), (s, 0, u), (0, t, u), \mathrm{D}(s, t, u)$$

を頂点に持つ直方体を考えると、四面体 ABCD は題意を満たす。■