

問題 1 1

$n \geq 3$ を整数とする。会議に参加している n 人の人が、それぞれ傘を 1 本ずつ持っており、自分の傘と他人の傘は区別できるものとする。その n 本の傘が傘立てに入っている。これを n 人の人が、順番に、一人一本ずつ、次の規則で傘を取る。

まず、1 番目の人は、 n 本の傘から無作為に 1 本の傘を取る。次に、2 番目の人は、自分の傘が傘立てにあれば、自分の傘を取り、自分の傘が傘立てになければ、傘立てにある $n - 1$ 本の傘から無作為に 1 本の傘を取る。一般に、 i 番目の人は、自分の傘が傘立てにあれば、自分の傘を取り、自分の傘が傘立てになければ、傘立てにある $n - i + 1$ 本の傘から無作為に 1 本の傘を取る。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) i 番目の人が取る傘が a_i 番目の人の傘であるとする。このとき、 $a_i = 1$ であるか、あるいは、 $a_i \geq i$ である。これを示せ。
- (2) n 番目の人と $n - 1$ 番目の人が、両者とも、自分の傘を取る確率を求めよ。