$\boxed{\text{問題９}}$

次の文章は、理工系の大学の学部の新入生が学ぶ解析学のテキストの一部である。(1) から (5) を示し、$\boxed{}$ を証明せよ。

数列 $a_1, a_2, \ldots$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

と定義する。二項定理から

$$a_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

である。無限等比級数の和を考えると

$$a_n < 3, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

である。すると、数列 $a_1, a_2, \ldots$ は上に有界な単調増加数列であるから、その極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。その極限値を e と置き、自然対数の底と呼ぶ。

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e の定義から

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4}$$

である。(3) と (4) から

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \tag{5}$$

である。(5) から $\boxed{f(x) = e^x \text{ の導関数は } f'(x) = e^x \text{ である。}}$