問題１１

$n \geq 3$ を整数とする。会議に参加している n 人の人が、それぞれ傘を１本ずつ持っており、自分の傘と他人の傘は区別できるものとする。その n 本の傘が傘立てに入っている。これを n 人の人が、順番に、一人一本ずつ、次の規則で傘を取る。

まず、1 番目の人は、n 本の傘から無作為に 1 本の傘を取る。次に、2 番目の人は、自分の傘が傘立てにあれば、自分の傘を取り、自分の傘が傘立てになければ、傘立てにある $n-1$ 本の傘から無作為に 1 本の傘を取る。一般に、i 番目の人は、自分の傘が傘立てにあれば、自分の傘を取り、自分の傘が傘立てになければ、傘立てにある $n-i+1$ 本の傘から無作為に 1 本の傘を取る。

このとき、次の問いに答えよ。

（１）i 番目の人が取る傘が a_i 番目の人の傘であるとする。このとき、$a_i = 1$ であるか、あるいは、$a_i \geq i$ である。これを示せ。

（２）n 番目の人と $n-1$ 番目の人が、両者とも、自分の傘を取る確率を求めよ。

［（類）大阪大学（2013）前期理系第５問］

（1）（解答例１）$j = a_i$ とし、$1 < j < i$ とする。i 番目の人が傘を取るよりも、j 番目の人が傘を取るほうが早いから、j 番目の人が傘を取るときには、j 番目の人の傘が傘立てにあることになる。すると、j 番目の人は自分の傘を取らなかったことになるから矛盾。■

（1）（解答例２）$n = 3$ とすると、

$$(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1)$$

であるから、題意が成立する。$n \geq 4$ とする。まず、1 番目の人が自分の傘を取ったならば、2 番目以降の人も自分の傘を取ることになる。すると、$a_i = i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ である。次に、$a_1 = j \geq 2$ とすると、2 番目から $j-1$ 番目の人は自分の傘を取る。$j-1$ 番目の人までが傘を取り終えた段階で、残っている傘は、$1, j+1, j+2, \ldots, n$ 番目の人の傘である。今から傘を取る人は、$j, j+1, j+2, \ldots, n$ 番目の人である。j 番目の人は、残っている $n-j+1$ 本の傘から無作為に 1 本の傘を取ることになるから、その状況は、会議に参加している人数が $n-j+1$ 人のときの状況である。すると、数学的帰納法の仮定から、$i \geq j$ のとき、$a_i = 1$ であるか、あるいは、$a_i \geq i$ である。■

（２）（解答例１）1 番目の人から $n-2$ 番目の人が傘を取った段階で、残っている可能性のある傘は、$1, n-1, n$ 番目の人の傘である。1 番目の人が、$1, n-1, n$ 番目の人の傘のいずれかを選ぶ確率は等しい。一般に、$2 \leq i \leq n-2$ 番目の人が自分が傘を取る段階（すなわち、1 番目の人から $i-1$ 番目の人が傘を取った段階）で、自分の傘が既に取られてしまっているとき、$1, n-1, n$ 番目の人の傘は残っているから、i 番目の人が、$1, n-1, n$ 番目の人の傘のいずれかを選ぶ確率は等しい。すると、1 番目の人から $n-2$ 番目の人が傘を取った段階で、$1, n-1, n$ 番目の人の傘のぞれぞれが残っている確率は等しい。n 番目の人と $n-1$ 番目の人が、両者とも、自分の傘を取るのは、1 番目の人から $n-2$ 番目の人が傘を取った段階で、$n-1, n$ 番目の人の傘が残っている場合であるから、その確率は、

$$\frac{1}{3}$$

である。■

（２）（解答例２）$n=3$ とすると、$(a_2, a_3) = (2, 3)$ となる確率は $a_1 = 1$ となる確率であるから、

$$\frac{1}{3}$$

である。$n=4$ とすると、$(a_3, a_4) = (3, 4)$ となる確率は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

である。$n \geq 5$ のとき、（１）（解答例２）の状況を踏襲し、数学的帰納法を使うと求める確率は

$$\frac{1}{n} + (n-3)\frac{1}{n}\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

である。■