問題１２

（１）あるマラソン選手が出発点から 40km の距離をちょうど 2 時間で走った。このとき途中のある 3 分間はちょうど 1km 進んだことを説明せよ。

［信州大学（2005）前期医学部第 5 問（３）］

（２）x を正数とするとき、$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

［名古屋大学（2002）前期理系第 1 問（１）］

（３）$f(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とする。$0 < a < 1$ であるどんな a に対しても

$$\int_0^a f(x)dx \leq a\int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを証明せよ。ここで $f(x)$ が増加関数であるとは、$x_1 < x_2$ ならばつねに $f(x_1) \leq f(x_2)$ が成立することをいう。

［名古屋大学（1975）理系第 5 問（選択問題）］

（1）（解答例）そのマラソン選手の出発してから x 分（$0 \leq x \leq 120$）で走る距離を $f(x)$ km とする。また、$0 \leq x \leq 117$ のとき、x 分から $x+3$ 分の 3 分間で走る距離を $g(x)$ km とする。関数 $f(x)$ は連続関数である。すると、

$$g(x) = f(x+3) - f(x)$$

も連続関数である。いま、

$$\sum_{n=0}^{39} g(3n) = 40$$

であるから、$g(3n_+) \geq 1$ となる $0 \leq n_+ \leq 39$ と $g(3n_-) \leq 1$ となる $0 \leq n_- \leq 39$ が存在する。$3n_+ < 3n_-$ とすると、中間値の定理から $g(x) = 1$ となる $3n_+ < x < 3n_-$ が存在する。■

（２）（解答例１）微分法における平均値の定理から

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x=\frac{1}{c}$$

を満たす $x<c<x+1$ が存在する。

$$\frac{1}{c}>\frac{1}{x+1}$$

であるから、

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{x+1}$$

である。■

（２）（解答例２）

$$\begin{aligned}\log\left(1+\frac{1}{x}\right) &= \log(x+1)-\log x\\ &= \int_x^{x+1}\frac{1}{t}\,dt\\ &> \int_x^{x+1}\frac{1}{x+1}\,dt\\ &= \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

である。■

（３）（解答例）積分法における平均値の定理から

$$\int_0^a f(x)dx = a \cdot f(b)$$

を満たす $0 < b < a$ が存在する。すると、$f(x)$ が増加関数であることから

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx \\
&= a \cdot f(b) + \int_a^1 f(x)dx \\
&\geq a \cdot f(b) + \int_a^1 f(a)dx \\
&= a \cdot f(b) + (1-a)f(a) \\
&\geq a \cdot f(b) + (1-a)f(b) = f(b)
\end{aligned}$$

となる。それゆえ

$$\int_0^a f(x)dx = a \cdot f(b) \leq a \int_0^1 f(x)dx$$

となる。■