問題９

次の文章は、理工系の大学の学部の新入生が学ぶ解析学のテキストの一部である。(1) から (5) を示し、$\boxed{}$ を証明せよ。

数列 $a_1, a_2, \ldots$ を

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

と定義する。二項定理から

$$a_n < a_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

である。無限等比級数の和を考えると

$$a_n < 3, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

である。すると、数列 $a_1, a_2, \ldots$ は上に有界な単調増加数列であるから、その極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する。その極限値を e と置き、自然対数の底と呼ぶ。

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e の定義から

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{4}$$

である。(3) と (4) から

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e \tag{5}$$

である。(5) から $\boxed{f(x) = e^x \text{ の導関数は } f'(x) = e^x \text{ である。}}$

（解答例）

$$
\begin{aligned}
a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \cdot 1^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \\
&< 1+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!} \\
&< 1+\sum_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!} \\
&= a_{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= 1+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \\
&= 1+\frac{1}{1!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!} \\
&< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\
&< 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&< 3
\end{aligned}
$$

実数 $x \geq 1$ に対し

$$n \leq x < n+1$$

を満たす整数 $n \geq 1$ が存在する。すると、

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

から

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

すると、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

から、

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x} \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right) \\
&= e
\end{aligned}$$

すると、

$$\lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to-0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

から

$$\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

すると、$f(x)=e^x$ の導関数は、導関数の定義から、

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} \\
&= e^x\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h} \\
&= e^x\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_e(1+t)} \\
&= e^x\lim_{t\to0}\frac{1}{\log_e(1+t)^{\frac{1}{t}}} \\
&= e^x\frac{1}{\log_e e} \\
&= e^x
\end{aligned}$$

である。■