問題１３

（１）$\log_2 3$ と $\log_3 4$ の大小を比較せよ。

［名古屋大学（1975）理系第 1 問（１）］

（２）2 つの数 $(0.99)^{99}$ と $(1.01)^{-101}$ の大小を比較せよ。

［名古屋大学（1980）前期理系第 3 問（選択問題）］

（１）（解答例１）

$$\log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} = \log_3 3\sqrt{3} > \log_3 4$$

であるから、$\log_2 3 > \log_3 4$ である。■

（２）（解答例２）

$$f(x) = \log_x(x+1) = \frac{\log(x+1)}{\log x}, \quad x > 1$$

と置く。すると、

$$f'(x) = \frac{x\log x - (x+1)\log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2} < 0$$

であるから、$f(x)$ は $x > 1$ の範囲で単調減少である。特に、$f(2) > f(3)$ であるから

$$\log_2 3 > \log_3 4$$

である。■

（２）（解答例１）

$$(1-x)^{\frac{1}{x}-1},\ \ (1+x)^{-\frac{1}{x}-1}$$

の $x=0.01$ における大小を比較する。$0<x<1$ の範囲で関数

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{x}-1\right)\log(1-x)-\left(-\frac{1}{x}-1\right)\log(1+x) \\ &= \left(\frac{1}{x}-1\right)\log(1-x)+\left(\frac{1}{x}+1\right)\log(1+x) \\ &= \frac{\log(1-x^2)}{x}+\log\frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

を考える。

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\log(1-x^2)-\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x} \\ &= -\frac{1}{x^2}\log(1-x^2)>0 \end{aligned}$$

であるから、関数 $f(x)$ は単調増加である。

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+0}\frac{\log(1-x^2)}{x} &= \lim_{x\to+0}\frac{x\log(1-x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\log\left(1-\frac{1}{t}\right)^t \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)}=\frac{1}{e}$$

であるから、

$$\lim_{x\to+0}f(x)=0$$

である。すると、

$$f(0.01)>0$$

であるから、$(0.99)^{99}>(1.01)^{-101}$ である。■

（２）（解答例２）$(0.99)^{99}(1.01)^{101}$ と $(1.01)^{-101}(1.01)^{101}=1$ との大小を比較する。

$$\begin{aligned}(0.99)^{99}(1.01)^{101} &= (0.99)^{99}(1.01)^{99}(1.01)^2\\ &= (1-0.01)^{99}(1+0.01)^{99}(1.0201)\\ &= (1-0.0001)^{99}(1.0201)\end{aligned}$$

$n \geq 3$ とし、関数 $f(x)=(1-x)^n$ を考える。

$$f'(x)=-n(1-x)^{n-1},\ \ f''(x)=n(n-1)(1-x)^{n-2}$$

であるから、曲線 $y=f(x)$ の $(0,1)$ における接線の方程式は $y=1-nx$ である。しかも、$-1<x<1$ の範囲で $f''(x)>0$ であるから、$-1<x<1$ の範囲で $y=f(x)$ は下に凸である。すると、$-1<x<1$ で

$$(1-x)^n \geq 1-nx$$

である。ここで、$n=99, x=0.0001$ とすると、

$$(1-0.0001)^{99} \geq 1-99\cdot 0.0001 = 1-0.0099$$

である。すると、

$$(1-0.0001)^{99}(1.0201) \geq 0.9901\cdot 1.021 > 0.99\cdot 1.02 = 1.0098 > 1$$

であるから、$(0.99)^{99} > (1.01)^{-101}$ である。■