問題１４

$n \geq 2,\ k \geq 0$ は整数で $k \leq n$ とする。穴のあいた $2k$ 個の白玉と $2n-2k$ 個の黒玉にひもを通して輪を作る。このとき適当な２箇所でひもを切って n 個ずつの２組に分け、どちらの組も白玉 k 個、黒玉 $n-k$ 個からなるようにできることを示せ。 ［京都大学（2006）前期文系第５問］

（解答例１） 正 $2n$ 角形の頂点を時計回りに $1, 2, \ldots, 2n$ とする。$2n$ 個の頂点のうち、$2k$ 個を白色に塗り、$2n-2k$ 個を黒色に塗る。n 個の頂点 $i, i+1, \ldots, i+n-1$ のうち、白色の頂点の個数を $f(i)$ とする。ここで、$i = 1, 2, \ldots, n, n+1$ である。すると、$f(i+1)$ は $f(i)-1,\ f(i),\ f(i)+1$ のいずれかである。他方、$f(1)+f(n+1) = 2k$ である。いま、$f(1) \leq k$ とすると、$f(n+1) \geq k$ である。すると、$k = 1, 2, \ldots, n, n+1$ と動かすと、$f(i) = k$ となる i が $1 \leq i \leq n+1$ の範囲に存在する。$f(1) \geq k$ のときも同様である。■

（解答例２） n に関する数学的帰納法を使う。$n = 2$ ならば $k = 0, 1, 2$ であるから、$k = 1$ のときだけを考える。$k = 1$ ならば白玉２個、黒玉２個となる。それらで輪を作るとき、どちらかの黒玉から時計回りに、黒黒白白となっているか黒白白黒となっているか黒白黒白となっているかである。すると、

黒 | 黒白 | 白、黒白 | 白黒 |、黒白 | 黒白 |

と区切れば題意を満たす。

以下、$n \geq 3$ とし、$n-1$ と $n-2$ のときは題意が成立すると仮定する。正 $2n$ 角形の頂点を時計回りに $1, 2, \ldots, 2n$ とする。$2n$ 個の頂点のうち、$2k$ 個を白色に塗り、$2n-2k$ 個を黒色に塗る。

頂点１の色と頂点 $n+1$ の色が同じ（たとえば、白）ならば、頂点１と頂点 $n+1$ を除くと $n-1$ の状態になる。頂点１と頂点 $n+1$ を無視し $2, 3, \ldots, n, n+2, \ldots, 2n$ の輪と考えると、数学的帰納法の仮定から、その輪の適当な２箇所を切って $n-1$ 個ずつの２組 A と B に分け、どちらの組も白玉 $k-1$ 個、黒玉 $n-k$ 個からなるようにできる。すると、その輪に頂点１と頂点 $n+1$ を戻すと、A と B のどちらかに１が加われば反対側に $n+1$ が加わる。すると、どちらの組も白玉 k 個、黒玉 $n-k$ 個からなる。一般に、頂点 i の色と頂点 $n+i$ の色が同じならば、頂点 i と頂点 $n+i$ を除くと $n-1$ の状態になるから、頂点１と頂点 $n+1$ のときと同じ議論が使える。

任意の $i = 1, 2, \ldots, n$ で、頂点 i の色と頂点 $n+i$ の色が異なるとする。このとき、白と黒が隣り合う頂点を考える。たとえば、頂点１が白、頂点２が黒とする。すると、頂点 $n+1$ が黒、頂点 $n+2$ が白となる。いま、４個の頂点 $1, 2, n+1, n+2$ を

除くと $n-2$ の状態になるから、$n-2$ のときの数学的帰納法の仮定が使える。すると、その輪の適当な 2 箇所を切って $n-2$ 個ずつの 2 組 A と B に分け、どちらの組も白玉 $k-1$ 個、黒玉 $n-k-1$ 個からなるようにできる。すると、その輪に頂点 $1, 2, n+1, n+2$ を戻すと、A と B のどちらかに $1, 2$ が加われば反対側に $n+1, n+2$ が加わる。すると、どちらの組も白玉 k 個、黒玉 $n-k$ 個からなる。

以上から、n のときも題意が満たされる。■