問題１５

　e を自然対数の底とする。e^e に最も近い整数を求めよ。必要ならば次の近似値を用いよ。$e = 2.718, \log 2 = 0.693, \log 3 = 1.099, \log 5 = 1.609$

［北海道大学（1992）後期理系第５問］

（解答例１）

$$\log 15 = \log 3 + \log 5 = 1.099 + 1.609 = 2.708,$$

$$\log 16 = 4 \log 2 = 2.772$$

から

$$\log 15 < e = 2.718 < \log 16$$

である。すると、

$$\log 15 < \log e^e < \log 16$$

であるから、

$$15 < e^e < 16$$

である。対数関数のグラフ $y = \log x$ は上に凸であるから、

$$\frac{\log 15 + \log 16}{2} < \log \frac{15+16}{2}$$

すなわち

$$\frac{2.708 + 2.772}{2} < \log 15.5$$

から

$$2.740 < \log 15.5$$

である。すると、

$$e < 2.740 < \log 15.5$$

から

$$\log e^e < \log 15.5$$

である。これより

$$15 < e^e < 15.5$$

となるから、e^e に最も近い整数は 15 である。■

（解答例２）

$$15 = 3 \cdot 5 = e^{1.099} \cdot e^{1.609} = e^{2.708},$$

$$16 = 2^4 = (e^{0.693})^4 = e^{2.772}$$

から、

$$e^{2.708} < e^{2.718} < e^{2.772}$$

である。すると、

$$15 < e^e < 16$$

である。次に

$$\frac{3^5}{2^4} = \frac{243}{16} = 15.1875$$

であるから、

$$\log \frac{3^5}{2^4} = 5 \log 3 - 4 \log 2 = 5.495 - 2.772 = 2.723 > e = \log e^e$$

となる。すると、

$$15 < e^e < 15.1875$$

となるから、e^e に最も近い整数は 15 である。■