問題１６（a）

xyz 空間において体積が 1 よりも大きい立体 D がある。xyz 空間の体積が 1 の単位立方体を C_0 とする。すなわち、C_0 は、頂点が $(\pm1, \pm1 \pm 1)$ である立方体である。単位立方体を整数を成分とするベクトルで平行移動して得られる立方体を基本立方体と呼ぶ。D を有限個の異なる基本立方体 $C_1, C_2, \ldots, C_q$ で覆う。$D_i = D \cap C_i$ と置き、C_i 平行移動し、C_0 に重なるようにするとき、$D_i = D \cap C_i$ が $D'_i \subset C_0$ に移るとする。

(i) $D'_i \cap D'_j \neq \emptyset$ となる $1 \leq i < j \leq q$ が存在することを示せ。

(ii) D は、x 座標、y 座標、z 座標の差が、それぞれ、整数となるような異なる 2 点を含む。これを示せ。

（解答例）(i) D の体積は、$D_j \neq \emptyset$ となる D_j の体積の和である。すなわち、$D'_j \neq \emptyset$ となる D'_j の体積の和である。$D'_j \subset C_0$ であるから、任意の $1 \leq i < j \leq q$ で $D'_i \cap D'_j = \emptyset$ とすると、$D_j \neq \emptyset$ となる D'_j の体積の和は C_0 の体積の 1 を越えず、D の体積が 1 よりも大きいことに矛盾する。

(ii) $D'_i \cap D'_j \neq \emptyset$ となる $1 \leq i < j \leq q$ を選ぶ。$(x, y, z) \in D'_i \cap D'_j$ とし、(x, y, z) に移る D_i の点を (x', y', z') とし、(x, y, z) に移る D_j の点を (x'', y'', z'') とすると、x' と x'' の少数部分は一致するから、$x' - x''$ は整数である。同様に、$y' - y'', z' - z''$ も整数である。すると、D は、x 座標、y 座標、z 座標の差が、それぞれ、整数となるような異なる 2 点 $(x', y', z'), (x'', y'', z'')$ を含む。■

問題１６（ｂ）

xyz 空間において体積が 8 よりも大きい図形 D が、原点対称で、しかも凸ならば、D は原点以外の格子点を含む。問題１６（ａ）の (ii) を使い、これを示せ。

（解答例）図形 D を原点に関して $\dfrac{1}{2}$ に縮めた図形

$$D' = \left\{ \frac{1}{2}a : a \in D \right\}$$

を考える。D と D' は相似で、相似比は $2:1$ であるから、体積比は $8:1$ である。すると、D' の体積は 1 を越える。すると、問題１６（ａ）の (ii) から、D' の異なる 2 点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ を適当に選ぶと、$(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ は格子点となる。D は原点対称で凸だから、D' も原点対称で凸である。D' が原点対称であることから、$-(x_2, y_2, z_2) \in D'$ である。D' が凸であることから、(x_1, y_1, z_1) と $-(x_2, y_2, z_2)$ の中点

$$\frac{1}{2}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

は D' に属する。すると、原点と異なる格子点 $(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ は D に属する。■

● 問題１６（ｂ）を「(xyz 空間の）ミンコフスキーの格子点定理」と呼ぶ。