問題１７

（１）正の実数からなる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と正の実数 p がある。このとき

$$a_{n+1} > \frac{1}{2}a_n - p$$

を満たす番号 n が存在することを証明せよ。

［京都大学（2003）後期理系第４問］

（２）すべては 0 でない n 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ があり

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

を満たすとき、$a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n > 0$ が成り立つことを証明せよ。

［京都大学（1986）文理共通第１問］

（１）（解答例１）

$$a_{n_0+1} \geq \frac{1}{2}a_{n_0}$$

を満たす番号 n_0 があれば、

$$a_{n_0+1} > \frac{1}{2}a_{n_0} - p$$

であるから、そのような番号 n_0 が存在しないとき、すなわち、

$$0 < a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

なる数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を考える。すると、任意の n で

$$0 < a_n < \frac{1}{2}a_{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_{n-2} < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^n a_0$$

である。番号 $n_* > 0$ を十分大きく選ぶと

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n_*} a_0 < 2p$$

となるから

$$\frac{1}{2}a_{n_*} < p$$

となる。すると、

$$a_{n_*+1} > 0 > \frac{1}{2}a_{n_*} - p$$

である。■

● 問題文の $\dfrac{1}{2}$ を $0<r<1$ なる任意の実数の置き換えても題意は成立する。

（１）（解答例２）背理法で証明する。題意の番号 n が存在しないと仮定すると、

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n - p, \quad n=0,1,2,\dots$$

である。両辺に $2p$ を加えると

$$a_{n+1}+2p \leq \frac{1}{2}(a_n+2p), \quad n=0,1,2,\dots$$

となる。すると、

$$0 < a_n+2p \leq \frac{1}{2}(a_{n-1}+2p) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2(a_{n-2}+2p) \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n(a_0+2p)$$

となる。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n(a_0+2p)=0$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2p)=0$$

となる。すると、

$$\lim_{n\to\infty}a_n=-2p<0$$

となり、矛盾。■

（２）（解答例１）題意から $a_1<0, a_n>0$ である。すると、

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq 0 \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$$

となる k が存在する。このとき、

$$a_1+2a_2+\cdots+ka_k \geq k(a_1+a_2+\cdots+a_k)$$

および

$$\begin{aligned}(k+1)a_{k+1}+\cdots+na_n &\geq (k+1)(a_{k+1}+\cdots+a_n)\\ &> k(a_{k+1}+\cdots+a_n)\end{aligned}$$

が成立する。すると、

$$a_1+2a_2+\cdots+na_n > k(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$$

である。■

（２）（解答例２）数学的帰納法で証明する。題意から $a_1 < 0, a_n > 0$ である。まず、$n = 2$ とすると、

$$a_1 < 0, a_2 = -a_1 > 0$$

であるから、

$$a_1 + 2a_2 = a_2 > 0$$

である。$n > 2$ とし、$n - 1$ のとき題意が成立すると仮定し、

$$b_{n-1} = a_{n-1} + a_n$$

と置く。すると、

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-2} \leq b_{n-1}, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2} + b_{n-1} = 0$$

であるから、帰納法の仮定から

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-2)a_{n-2} + (n-1)b_{n-1} > 0$$

である。$a_n > 0$ から

$$(n-1)b_{n-1} = (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_n < (n-1)a_{n-1} + na_n$$

である。すると、

$$a_1 + 2a_2 + \cdots + (n-2)a_{n-2} + (n-1)a_{n-1} + na_n > 0$$

である。■