問題２１（ａ）

xyz 空間で 4 点 O$(0,0,0)$, A$(1,2,0)$, B$(2,0,1)$, C$(0,1,2)$ を頂点とする四面体（表面および内部）を K とする。K の点 P から平面 $x+y+z=-1$ へ垂線を引き、その平面との交点を P$'$ とする。P が K を動くとき、P$'$ の動く範囲の面積を求めよ。

問題２１（ｂ）

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が、内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く。

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき、立体 D の体積を求めよ。

問題２１（ｃ）

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を満たしており、0 と異なる 4 つの実数 p,q,r,s に対して 4 点 P, Q, R, S を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

によって定める。このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば、

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}$$

が成立することを示せ。