問題１９（a）

連立方程式

$$2^x + 3^y = 43, \quad \log_2 x - \log_3 y = 1$$

を考える。

（１）この連立方程式を満たす自然数 x, y の組を求めよ。

（２）この連立方程式を満たす正の実数 x, y は、（１）で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。

［大阪大学（2010）前期文系第２問］

（解答例）（１）$3^4 = 81 > 43$ であるから、$1 \leqq y \leqq 3$ である。まず、$y = 1$ とすると $2^x = 40$ だから x は自然数ではない。次に、$y = 2$ とすると $2^x = 34$ だから x は自然数ではない。$y = 3$ とすると $2^x = 16$ だから $x = 4$ である。$\log_2 4 - \log_3 3 = 1$ であるから、この連立方程式を満たす自然数 x, y の組は $(x, y) = (4, 3)$ のみである。■

（２）$\log_2 x - \log_3 y = 1$ であるから、x が増加すると、y も増加する。他方、$2^x + 3^y = 43$ であるから、x が増加すると、y は減少する。いま、(x, y) が解であるとし、$x > 4$ とすると、$(4, 3)$ が解であることから、$\log_2 x - \log_3 y = 1$ から $y > 3$ となるが、$2^x + 3^y = 43$ から $y < 3$ となり、矛盾する。すると、$x > 4$ となる解は存在しない。同様に考えると、$x < 4$ となる解も存在しない。すると、(x, y) が解であれば、$x = 4$ となるから $y = 3$ となる。■

問題１９（b）

$\ell, m\, n$ を 3 以上の整数とする。等式

$$\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right)\ell = 2$$

を満たす ℓ, m, n の組をすべて求めよ。

［大阪大学（2010）前期理系第３問］

（解答例１）与式から

$$\begin{aligned} \ell(2n - mn + 2m) &= 4m \\ \ell(4 - (m-2)(n-2)) &= 4m \end{aligned}$$

$\ell > 0$ と $4m > 0$ から $4 - (m-2)(n-2) > 0$ である。すると

$$(m-2)(n-2) < 4$$

$m \geq 3, n \geq 3$ より $m - 2 > 0, n - 2 > 0$ であるから

$$(m-2, n-2) = (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1)$$

$$(m, n) = (3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)$$

となる。これより

$$(\ell, m, n) = (4,3,3), (6,3,4), (8,4,3), (12,3,5), (20,5,3)$$

となる。■

（解答例２）$\ell \geq 3, m \geq 3$ から、

$$0 < \frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1 \leq \frac{n}{3} - \frac{n}{2} + 1 = 1 - \frac{n}{6}$$

である。すると、$n = 3, 4, 5$ である。

$n = 3$ ならば

$$\left(\frac{3}{m} - \frac{1}{2}\right)\ell = 2 \text{ から } \ell = \frac{4m}{6-m}$$

だから、$(m, \ell) = (3,4), (4,8), (5,20)$ となる。

$n = 4$ ならば

$$\left(\frac{4}{m} - 1\right)\ell = 2 \text{ から } \ell = \frac{2m}{4-m}$$

だから、$(m, \ell) = (3, 6)$ となる。

　$n = 5$ ならば

$$\left(\frac{5}{m} - \frac{3}{2}\right)\ell = 2 \ \text{から}\ \ \ell = \frac{4m}{10 - 3m}$$

だから、$(m, \ell) = (3, 12)$ となる。

　これより

$$(\ell, m, n) = (4, 3, 3), (6, 3, 4), (8, 4, 3), (12, 3, 5), (20, 5, 3)$$

となる。■