問題２０（ａ）

　1 より大きい自然数 n について、不等式

$$2^n < \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 2^{2n}$$

を証明せよ。　［名古屋大学（1976）文理共通第 1 問（ 1 ）］

（解答例）数学的帰納法で証明する。$n = 2$ ならば、題意の不等式は

$$4 < 6 < 16$$

となるから成立する。$n \geq 2$ のとき成立すると仮定する。

$$2 < \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} < 2^2$$

であるから、

$$2^n \cdot 2 < \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} < 2^{2n} \cdot 2^2$$

すなわち

$$2^{n+1} < \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} < 2^{2(n+1)}$$

が成立する。■

問題２０（ｂ）

正の整数 n に対して、

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

と置く。

（1）a_n が整数であることを示せ。

（2）a_n が素数となる正の整数 n をすべて求めよ。

［東京工業大学（2021）前期第３問］

（解答例）まず、

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_{n+1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n = {}_{2n}\mathrm{C}_{n+1}\,\frac{(n+1)}{n}$$

であるから、

$$n \cdot {}_{2n}\mathrm{C}_n = {}_{2n}\mathrm{C}_{n+1} \cdot (n+1)$$

である。n と $n+1$ は互いに素であるから、${}_{2n}\mathrm{C}_n$ は $n+1$ で割り切れる。すると、a_n は整数である。次に、

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 14, a_5 = 42$$

であるから、$n = 2, 3$ のときは素数である。

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

から、漸化式

$$a_{n+1} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2)}a_n = \frac{2(2n+1)}{n+2}a_n \tag{1}$$

が導かれる。a_{n+1} が素数となる $n \geq 5$ で n がもっとも小さいものを考える。すると、a_n は素数でない。漸化式 (1) から、$n+2$ は $2(2n+1)a_n$ を割り切る。しかし、

$$\frac{2(2n+1)}{n+2} = 4 - \frac{6}{n+2} > 3 \tag{2}$$

であるから、$n \geq 5$ とすると、$n+2$ は $2(2n+1)$ を割り切らない。$n+2$ が a_n を割り切るならば、a_{n+1} は 2 と $2n+1$ で割り切れるから a_{n+1} は素数ではない。すると、

$pq = n+2$ となる整数 $p \geq 2$ と $q \geq 2$ が存在し、p は $2(2n+1)$ を割り切り、q は a_n を割り切る。このとき、

$$a_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{p}\frac{a_n}{q}$$

となるが

$$\frac{2(2n+1)}{p} \geq 2$$

であるから、a_{n+1} が素数であることから

$$\frac{a_n}{q} = 1$$

となる。すると、

$$a_n = q \leq \frac{n}{2} + 1 \leq n$$

となる。すなわち

$$a_n \leq n$$

となる。$a_5 > 5$ であるから $n \geq 6$ である。ところが、漸化式 (1) から、$n \geq 5$ ならば

$$a_{n+1} > 3a_n > 3^2 a_{n-1} > \cdots > 3^{n-4} a_5 > 3^{n-1} > n+1$$

であるから、矛盾。すると、a_{n+1} が素数となる $n \geq 5$ は存在しない。これより、a_n が素数となるのは、$n = 2, 3$ のときである。■

- 東工大の問題だと、$n \geq 4$ ならば $a_n > n+2$ を示せ、という枝問があった。その不等式は、漸化式 (1) と数学的帰納法から証明できる。その不等式を既知とするならば、後半の議論は

$n \geq 5$ とし、a_n が素数であるとする。まず、(1) から $2(2n+1)a_n$ は $n+2$ で割り切れる。ところが、$a_n > n+2$ は素数であるから、$n+2$ は $2(2n+1)$ を割り切る。しかし、(2) から、$n+2$ が $2(2n+1)$ を割り切る $n \geq 5$ は存在しない。

とすることができる。なお、

$$a_n = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

は、カタラン数と呼ばれる。数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ は、初期条件 $a_0 = 1$ と漸化式

$$a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i a_{n-i}$$

を満たす。たとえば、

$$a_5 = a_0 a_4 + a_1 a_3 + a_2 a_2 + a_3 a_1 a_4 a_0$$

など。