問題２１（a）

　xyz 空間で 4 点 O$(0,0,0)$, A$(1,2,0)$, B$(2,0,1)$, C$(0,1,2)$ を頂点とする四面体（表面および内部）を K とする。K の点 P から平面 $x+y+z=-1$ へ垂線を引き、その平面との交点を P$'$ とする。P が K を動くとき、P$'$ の動く範囲の面積を求めよ。　［北海道大学（1992）前期理系第２問］

（解答例）四面体 OABC の底面 ABC を含む平面の方程式は $x+y+z=3$ であるから、底面 ABC と平面 $x+y+z=-1$ は平行である。四面体の頂点 O$(0,0,0)$ から底面に下ろした垂線と底面との交点は底面の三角形の重心 $(1,1,1)$ である。すると、P$'$ の動く範囲の面積は底面の三角形の面積と等しい。△ABC は一辺の長さが $\sqrt{6}$ の正三角形であるから、その面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となる。■

問題２１（ｂ）

半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が、内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件 (A), (B) を同時に満たしながら動く。

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

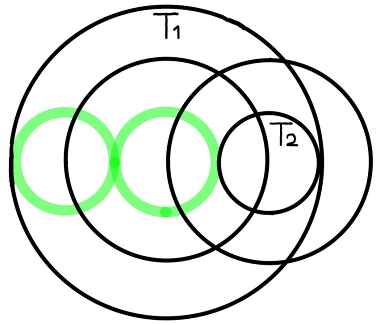
S の中心が存在しうる範囲を D とするとき、立体 D の体積を求めよ。

［大阪大学（2010）前期理系第４問］

（解答例）xyz 空間で、T_1 の中心を原点、T_2 の中心を $(2,0,0)$ とし、平面 $z=0$ による切り口を考える。すると、立体 D は、円 $x^2+y^2=4$ の内部と周から円 $(x-2)^2+y^2=4$ の内部を除いた部分を x 軸の回りに１回転させたものである。その体積は

$$\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3-2\pi\int_1^2(4-x^2)\,dx=\frac{22}{3}\pi$$

である。■



問題２１（ｃ）

四角形ABCDを底面とする四角錐OABCDは$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を満たしており、0と異なる4つの実数$p, q, r, s$に対して4点P, Q, R, Sを

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\,\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

によって定める。このときP, Q, R, Sが同一平面上にあれば、

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}$$

が成立することを示せ。［京都大学（2002）前期文系第２問］

（解答例）

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{s}{p}\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{s}{q}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{s}{r}\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

である。P, Q, R, Sが同一平面上にあるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=a\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+b\,\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

となる実数a, bが存在する。

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\,(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+b\,(\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$$

から

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-a-b)\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}+a\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+b\,\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

これより

$$1-a-b=\frac{s}{p},\ \ a=-\frac{s}{q},\ \ b=\frac{s}{r}$$

である。すると、

$$1+\frac{s}{q}-\frac{s}{r}=\frac{s}{p}$$
$$\frac{1}{s}+\frac{1}{q}-\frac{1}{r}=\frac{1}{p}$$
$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}$$

である。■