問題２２（a）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = 1$ と

$$a_n = 1 + \frac{1}{n^2}a_{n-1}^2 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

で定める。$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

［東京工業大学（1988）第 1 問］

（解答例）$1 \leq a_n \leq M$ となる n に無関係な定数 M が存在すれば

$$1 + \frac{1}{n^2} \leq a_n \leq 1 + \frac{M^2}{n^2}$$

である。すると、$n \to \infty$ のとき、$\dfrac{1}{n^2} \to 0, \dfrac{M^2}{n^2} \to 0$ から

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

となる。そのような定数 M を探す。$1 \leq a_{n-1} \leq M$ とすると、

$$1 \leq a_n = 1 + \frac{1}{n^2}a_{n-1}^2 \leq 1 + \frac{M^2}{n^2}$$

となればよい。すなわち、

$$1 + \frac{M^2}{n^2} \leq M \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

となればよい。すると、

$$1 + \frac{M^2}{4} \leq M$$

であればよいから、$M = 2$ とすればよい。■

問題２２（b）

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $a_1 = 1$ と

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

［東北大学（2012）前期理系第６問］

（解答例）極限 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が存在するならば、$\alpha > 0$ は

$$\alpha^2 = \frac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$$

を満たす。すると、

$$2\alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha - 4 = (\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-4) = 0$$

から、

$$\alpha = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} > 1$$

である。以下、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

を示す。

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - \alpha^2 &= \frac{3a_n+4}{2a_n+3} - \frac{3\alpha+4}{2\alpha+3} \\ &= \frac{(3a_n+4)(2\alpha+3)-(2a_n+3)(3\alpha+4)}{(2a_n+3)(2\alpha+3)} \\ &= \frac{a_n-\alpha}{(2a_n+3)(2\alpha+3)} \end{aligned}$$

であるから、

$$a_{n+1} - \alpha = \frac{a_n-\alpha}{(a_{n+1}+\alpha)(2a_n+3)(2\alpha+3)} \tag{1}$$

である。題意の漸化式と数学的帰納法から、任意の n で $a_n \geq 1$ である。(1) から、$a_n - \alpha$ の正負と $a_{n+1} - \alpha$ の正負は一致するが、$a_1 < \alpha$ であるから、任意の n で $a_n < \alpha$ である。(1) から、任意の n で

$$\begin{aligned} 0 < \alpha - a_{n+1} &= \frac{\alpha-a_n}{(a_{n+1}+\alpha)(2a_n+3)(2\alpha+3)} \\ &\leq \frac{\alpha-a_n}{5(1+\alpha)(2\alpha+3)} < \frac{\alpha-a_n}{2\cdot 5^2} \end{aligned}$$

である。

$$r = \frac{1}{2 \cdot 5^2}$$

と置くと、$0 < r < 1$ である。

$$0 < \alpha - a_{n+1} < r(\alpha - a_n) < \cdots < r^n(\alpha - 1)$$

から、$n \to \infty$ とすると、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$$

である。■

● 東北大学の問題は誘導を導く丁寧な枝問 (1), (2), (3), (4) があった。