問題２３（ａ）

１辺の長さが4の正方形の紙の表（おもて）を、図のように１辺の長さが１のマス目16個に区切る。その紙を２枚用意し、AとBの２人に渡す。AとBはそれぞれ渡された紙の２個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと、両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても、塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし、２枚の紙を重ね合わせるときには、それぞれの紙を回転させてもよいが、紙の四隅は合わせることとする。

［大阪大学（1999）前期理系第５問］

（解答例１）１６個のマス目のうち回転すると重なるマス目に同じ番号を振ると右図になる。Aの塗りつぶすマス目の番号とBの塗りつぶすマス目の番号に共通な番号がなければどのように重ね合わせても、塗りつぶされたマス目がどれも重ならない。Aの塗りつぶすマス目の番号をaとa'とし、Bの塗りつぶすマス目の番号をbとb'とする。すべての事象の個数は$({}_{16}\mathrm{C}_2)^2$である。

1	2	3	1
3	4	4	2
2	4	4	3
1	3	2	1

(i) $a \neq a', b \neq b'$のとき。たとえば$(a, a') = (1, 2), (b, b') = (3, 4)$とすると、事象の個数は$16^2$である。これより、(i) の事象の個数は$16^2{}_4\mathrm{C}_2 = 6 \cdot 16^2$である。

(ii) $a = a', b \neq b'$であるか、あるいは$a \neq a', b = b'$のとき。たとえば$(a, a') = (1, 1), (b, b') = (2, 3)$とすると、事象の個数は${}_4\mathrm{C}_2 \cdot 16 = 6 \cdot 16$である。これより、(ii) の事象の個数は$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 16$である。

(iii) $a = a', b = b'$のとき。たとえば$(a, a') = (1, 1), (b, b') = (2, 2)$とすると、事象の個数は$({}_4\mathrm{C}_2)^2 = 6^2$である。これより、(iii) の事象の個数は$3 \cdot 4 \cdot 6^2$である。

以上から、求める確率は

$$\frac{6 \cdot 16^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 16 + 3 \cdot 4 \cdot 6^2}{8^2 \cdot 15^2} = \frac{89}{300}$$

である。■

（解答例２）16個マス目から無作為に２個を選んでAがそのマス目を塗る。次に、塗ったマス目を紙の中心の回りに$90°, 180°, 270°$回転させるとき、塗ったマス目と重なるマス目も塗る。このとき、塗ったマス目の個数が4個となる確率をpとし、塗ったマス目の個数が8個となる確率を$1-p$とする。そのような4個、あるいは、8個

のマス目が塗られている紙の 16 個マス目から無作為に 2 個を選んで B がそのマス目を塗る。B が塗りつぶされていないマス目 2 個を塗れば、題意の状況になる。B が塗りつぶされていないマス目 2 個を塗る確率は、

(i) 塗ったマス目の個数が 4 個の紙ならば $\dfrac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}$

(ii) 塗ったマス目の個数が 8 個の紙ならば $\dfrac{{}_{8}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}$

すると、題意の確率は

$$\frac{{}_{12}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}p+\frac{{}_{8}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}(1-p)=\frac{7}{30}+\frac{19}{60}p=\frac{7}{30}+\frac{19}{60}\frac{4\cdot{}_{4}\mathrm{C}_2}{{}_{16}\mathrm{C}_2}=\frac{89}{300}$$

である。■

問題２３（b）

ある病気に罹患しているか否かを判定する検査を考える。この病気は 1000 人に一人が罹患していると仮定する。病気であるが陰性と判定する確率は 0.05 である。病気でないが陽性と判定する確率は 0.01 である。ある人がこの検査を受け、陽性と判断されたとき、その人がほんとうに病気にかかっている確率を求めよ。

（解答例１）無作為に選ばれた 100000 人の集団がいるとする。罹患している人は 100 である。そのうち、検査で陽性となる人は 95 人である。罹患していない人は 99900 人である。そのうち、検査で陽性となる人は 999 人である。すると、100000 人の集団の内、検査で陽性となる人は 1094 人である。その 1094 人の内、罹患している人は 95 人であるから、求める確率は

	罹患している	罹患していない	
陽性	95	999	1094
陰性	5	98901	98906
	100	99900	100000

$$\frac{95}{1094}$$

である。■

(解答例２）ある人が陽性と判定される事象 A は「罹患しており検査が陽性」あるいは「罹患してなく検査が陽性」のいずれかである。前者の確率は $\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100}$ である。後者の確率は $\frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{100}$ である。すると、陽性と判定される確率 $P(A)$ は

$$P(A) = \frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100} + \frac{999}{1000} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1094}{100000}$$

である。ある人が罹患している事象 B の確率を $P(B)$ とすると、求める確率は、条件付き確率

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{1000} \cdot \frac{95}{100}}{\frac{1094}{100000}} = \frac{95}{1094}$$

である。■