問題２５

　3 けたの素数 p の百の位の数を a, 十の位の数を b, 一の位の数を c とする。このとき、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は整数解をもたないことを証明せよ。

［名古屋大学（1977）理系第２問］

（解答例１）$p=100a+10b+c$ が 3 けたであるから、$a>0, b\geq 0$ である。素数であるから、$c=1,3,7,9$ である。2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の整数解を n とすると、n は負の整数であって、

$$c=-an^2-bn=-n(an+b)$$

であるから、$-n$ は c の約数である。すると、整数解 n は $-1,-3,-7,-9$ のいずれかである。$an^2+bn+c=0$ であるから

$$\begin{aligned} p &= (100a+10b+c)-(an^2+bn+c) \\ &= (100-n^2)a+(10-n)b \\ &= (10-n)((10+n)a+b) \end{aligned}$$

である。ところが、$10-n$ は、$11,13,17,19$ のいずれかであるから、$p>100$ は素数とはならない。■

（解答例２）$p=100a+10b+c$ が 3 けたであるから、$a>0, b\geq 0$ である。素数であるから、$c=1,3,7,9$ である。2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の整数解を n とすると、n は負の整数であって、

$$c=-an^2-bn=-n(an+b)$$

であるから、$-n$ は c の約数である。すると、整数解 n は $-1,-3,-7,-9$ のいずれかである。

- $n=-1$ とすると、

$$p=100a+10b+(-a+b)=99a+11b=11(9a+b)$$

　は素数ではない。

- $n=-3$ とすると、

$$p=100a+10b+3(-3a+b)=91a+13b=13(7a+b)$$

　は素数ではない。

- $n=-7$ とすると、

$$p = 100a + 10b + 7(-7a + b) = 51a + 17b = 17(3a + b)$$

  は素数ではない。

- $n=-9$ とすると、

$$p = 100a + 10b + 9(-9a + b) = 19a + 19b = 19(a + b)$$

  は素数ではない。

以上の結果、2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は整数解をもたない。■